自然科学（研究ノート）

ホモトピー論における「三密」について

On a “San-Mitsu” in Homotopy Theory

山口　俊博（高知大学教育学部）
YAMAGUCHI　Toshihiro

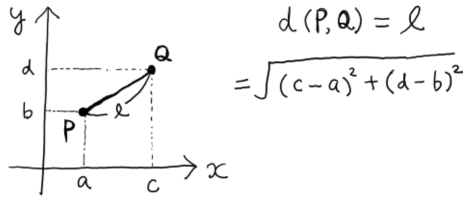
Faculty of Education,　Kochi University

ABSTRACT

In this paper, we introduce three themes of the author’s recent works, certain “close, compact(bounded) and dense” topological objects in homotopy theory. First, we introduce the self-closeness number of a space defined by Choi and Lee in 2015. Second, we propose a question on the compactness of a quotient space of a homotopy set. Third, we propose the problem such that the distribution of a homotopy invariant　for all simply connected spaces is dense or not. Finally, we bring up the dual-like content of “San-Mitsu”, namely “Miuto” consists of “apart, unbounded and discrete”.

1　はじめに

1637 年、デカルトが「座標」を導入したことにより、幾何学が爆発的に飛躍した。座標には目盛がついており、三平方の定理により２点間の距離が定義される。



これを土台としたものは一般の n 次元でも定義でき、n 次元ユークリッド空間と言われ、さらに抽象化したものが距離空間(X,d)である。これは、集合 X に次の３つの条件：X の勝手な点（元）x,y,z に対し

(1)　d(x,y)≧ 0 であり、d(x,y) = 0 ⇔ x = y

(2)　d(x,y) = d(y,x)

(3)　d(x,y) + d(y,z) ≧ d(x,z)

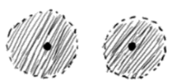
を満たす XxX 上の実数値関数 d を付加したものである。例えば人間関係にも「心理的に近い、遠い」といった表現があるので、それも距離空間と思いたいのは山々だが、(3)の三角不等式がキビシそうである。そこで、距離空間における「近傍」をもとに、もっと抽象化したものが「位相空間」(KH)といわれるもので、本稿のキーワードである。これは次の３つの性質をもつ X の部分集合族 O を備えた集合 X のことであり、O の元は「開集合」と言う：

１）空集合 φ と X それ自身は O に属す。

２）O の元の任意の和は O に属す。

３）O の元の任意の有限個の交わりは O に属す。

平たく言えば、位相空間とは、集合に位相構造（近さやつながり具合などの視覚的インフラ）を装備したものだが、空気みたいなモノなので、普段使っていてもその存在（ありがたさ）に気が付かないこともあろう。本稿では「空間」X や Y というのは、位相空間の中でも使い勝手のいい（基点付き）CW 複体とする。この空間は、ハウスドルフ空間、つまり勝手な２点には交わらない開近傍がそれぞれ存在する。例えるなら、ソーシャルディスタンスが保たれた状態と言える。

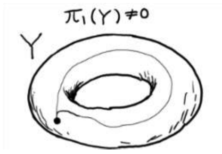


ところで日常生活における「三密」とは、「密接、密閉、密集」を言う。生活空間を距離空間と見立てての用語であろうが、これを平行移動して、筆者の最近の研究（ホモトピー論）においてそれらに関連するであろう「近い(close)、コンパクト(compact)、稠密(dense)」という 3 つの位相空間の話題について順に§2,3,4 で述べ、それぞれ今後の研究課題で締めたい。さらに§5 では、その双対っぽいこと（ここでは「三疎（みうと)」と言おう）について、ホモトピー論の枠にとらわれずに触れてみたい。ちなみに、「ホモトピー論」とは、（コーヒーカップも連続変形することにより円と同じと思えるという）ユル〜い世界で普遍でありながらも多様な性質を探すという幾何学のことである（N)。例えば

という連続写像（矢印）では３つ目のドーナッツまでは同相であり、４つ目の円は同相ではないがホモトピー同値になっている。通常の粘土変形では３つ目までしかできない。

2　近い(close)

空間 X と Y に対し、記号[X,Y]は、X から Y への連続写像のホモトピー同値類の集合のことで、単に（X から Y への）ホモトピー集合という。とくに X が n 次元球面 S^n のとき、この集合のもつ自然な群（かけ算で閉じた集合）を Y の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(Y)$といい、ホモトピー論における大切なツールとなっている(N)。例えば Y が浮き輪（２次元トーラス）で n=1 のとき、



となっている（基点に立っている人は、どんなに引っぱってもロープを切らずには手繰りよせれないということ)。n が２以上でもまったく同様であるが、絵にしづらいので省略する。

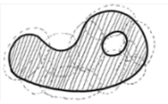
ところで、2015 年 Choi と Lee(CL) は、空間 X の自分自身の連続写像は何次元までホモトピー群の同型を導くならば[X,X]は自己ホモトピー同値写像類群 E（X）になるかという最小の次元（数）を X の「自己親密数(self closeness number)」N(X)と定義した。この数が小さければ小さいほどホモトピー集合[X,X]が自己ホモトピー同値写像類群 E（X）に「近い(close)」ということになるということが語源と思われる。ちなみに N(X)=0 となるのは X が一点のときである。このホモトピー不変量について、小田信行氏と筆者は様々なケースで評価を行っている(OY1)(OY2)(OY3)(Y2)が、まだまだ基本的かつ不明なことが沢山ある。例えば、XvY を X と Y の一点和、XxY を X と Y の直積としたとき

問題１「一般に N(XvY)や N(XxY)は max{N(X),N(Y)}に等しいか？」

ということがずっと引っかかっている。

3　コンパクト(compact)

２つ目に、ホモトピー集合[X,Y]の大きさと付随する位相について述べる。この節では、X と Y は有理ホモロジー群が有限次元の単連結有理空間(FHT)とする。ここで、「単連結」とは $\pi_1(X)=0$ となるときをいう。 1975 年に Copeland と Shar は、[X,Y] は１点もしくは無限集合であると予想したが、これについては 2000 年に、Arkowitz と Lupton によって反例が示されている(AL)。ところで、位相空間 Z の任意の開被覆において有限個からなる部分被覆が必ず存在するとき、Z を「コンパクト」という。例えば、不要な被覆を取り除いた後、(目を凝らして見ると)


は９個の開集合で被覆されている。

有限次元ユークリッド空間において有界閉（bounded closed）集合はコンパクトであるし、有限 CW 複体や有限個の点の集合はコンパクトである。一般にファイブレーション(N) は、底空間から分類空間への写像のホモトピー類によって分類できる。輿倉昭治氏と筆者は、そのもっと粗い分類のために、ホモトピー集合[X,Y]の２つの元 f と g に対して、f が g と E（Y）の元との合成となるとき f ~ g という同値関係を定義して、それで割った商集合 [X,Y]/~ に自然な位相構造を入れて考察した(YY1)(YY2)。その論文の中での例は全て有限個の点集合であったが、一般に

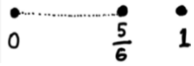
問題２「[X,Y] /~ は有限集合か？　もしくはコンパクトか？」

という疑問が残った。

4　稠密(dense)

３つ目に、大域的な視点から、あるホモトピー不変量の分布について述べる。その前に、位相空間の部分集合 Z において Z の勝手な点の任意の近傍は A の点を含むとき、A は Z において「稠密」であるという。例えば、有理数の集合は実数直線において稠密である。平たく言えば、「密集している」ということである。ところで、単連結な空間 X に対し、h(X)=a/b を、a を X のホモトピー群の階数の和、b を X のホモロジー群の階数の和と定義しよう。ちなみに b は X の様々な次元における穴の数のこと。この h(X)は０以上の有理数に値を持つホモトピー不変量である。a,b ともに有限のとき h(X)は１以下であろうという 40 年前の Hilali 氏の予想はいまだ未解決であり、筆者を含む多くの研究者によって部分的に肯定的に解決されている。ところで h(X)の分布は興味深く、2011 年には中村治氏と筆者（NY）は h(X)は１未満なら 5/6 以下であることを予想している。さらに(NY)では、h(X)は０が集積点であることについて触れており、それについては最近 Amann(A)も言及している。筆者は、ある奇数次の元のみからなる（ある規則性を持った）無限個の Sullivan モデル(FHT)達 X_n において lim $h(X_n)$ = 1/3 となることを確認している。本稿では、

問題３　「h(X)の分布は 5/6 以下において稠密か？ そして h(X)の分布は



となっているか？」

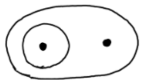
を提起したい。ちなみに、1 は X が２次元球 S^2 のとき、および 5/6 は X が等質空間 SU(6)/S(3)xSU(3)のときである。後者は、次数が４，６、７，９，１１である５個の元の基底の有理 Sullivan モデル(FHT)のホモロジー群の計算によって得られることを付しておく。

5　三疎(みうと)

この機会に、(三密を避けて) ３つの「疎」、すなわち「離れた(apart)、非有界(unbounded)、離散(discrete)」というワードについても触れておきたい。

１つ目に、ホモトピー不変量の一つに LS カテゴリー(FHT)と言われるものがある。これは、空間 X を可縮なもので覆える最小のな数＋１のことであり、cat(X)と書く（ここでは X のと同じ有理ホモトピー型の空間で考える)。一方で、有理コホモロジーの積の最大の長さをカップ長といい、cup(X)と書く。formal 空間（FHT）等ではそれらは等しくなる。たとえば X が球面だと cat(X)=cup(X)=1 である。2006 年に筆者（Y1）は、勝手な 0<a<b に対し、cup(X)=a かつ cat(X)=b となる空間 X(a,b)のモデルを作った。とくに、カップ長と LS カテゴリーはいくらでも「離れた」ものが存在することがわかった。

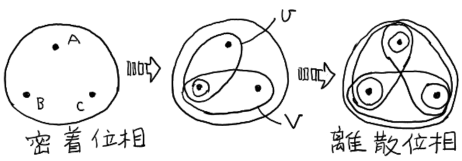
２つ目に、1991 年、Schlessinger と Stasheff (SS) は、与えられた有理数体上の次数付き可換代数 H に対し、それを有理コホモロジーとしてもつ空間のモジュライ空間を考察した。その中で、例えば H がある３つの球面の１点和の有理コホモロジー環と同型の有理係数の次数付き可換代数の場合、それは２点集合であり、開集合を○で囲むと、


という位相が入っていることが示された。

例えるなら、左の人はマスクしているのに右の人はしてない状況ともいえるし、漫才コンビなら、左の芸人は人

気がありよく知られているのに、右の芸人は影が薄いともいえよう。その後、2003 年に志賀博雄氏と筆者（SY）は、モジュライ空間が「非有界」になる例を与えた。

３つ目に、「位相空間は至る処に存在している！」というスローガンのもとに（いささか強引に）身の回りを振り返りたい。学校において、クラスの担任の先生から見た生徒達の（成績などの情報でなく）人間関係の位相は、年度始めは「密着」位相（開集合がφとＸのみの位相）かもしれない。しかし、月日が経つにつれ、生徒間の交流に触れるごとに位相は（不可逆的に）細かくなっていき、段々と「離散」位相に近づくであろう。離散位相とは、全ての部分集合が開集合である位相のことであるが、ここでは教師が各生徒の性格や様々な人間関係を把握していることと設定している（いい加減で申し訳ない）。例えば、集合Ｘを生徒が A,B,C の３人のみからなるクラスとしよう。先生が知っているグループを開集合とし、○で囲んだ場合、新学期から年度末までの位相構造を図式化すると



というような「遷移」(O)が予想される（矢印は時間）。§１の３）にあるように、開集合の交わり（共通集合）は開集合だから（？）、様々なグループを知れば知るほど、各生徒の個性、性格も徐々に理解できよう。例えば上図の真中の位相においては、Ｕ と Ｖ という２つのグループを知ることにより、Ｂ 君の人となりが浮かび上がってくる（U ∩ V = {B} は開集合になる）、という具合に…。しかし、自粛要請により対面授業や行事ができず、オンライン授業のみが強いられるなら、このような位相の遷移を期待するのは難しいのかもしれない。

謝辞　本研究の一部は科研費（基盤研究 C）20K03591 の助成を受けています。不親切な説明もあったろうと思いますが、ご質問は tyamag@kochi-u.ac.jp まで、よろしくお願いいたします。。

引用文献

(A) M.Amann, Homology versus homotopy in fibrations and in limits, arXiv: 2006.03390 (2020)

(AL) M.Arkowitz and G.Lupton, Rational obstruction theory and rational homotopy sets, Math.Z. 235 525-539 (2000)

(CL) H. W. Choi and K. Y. Lee, Certain numbers on the groups of self-homotopy equivalences, Topology and its Applications, 181　104-111 (2015)

(FHT) Y.Félix, S.Halperin and J-C.Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics 205 Springer-Verlag, (2001)

(KH) 小林貞一、逸見豊「集合と位相空間の基礎・基本」牧野書店（2010）

(NY) O.Nakamura and T.Yamaguchi , Lower bounds of Betti numbers of elliptic spaces with certain formal dimensions, Kochi Journal of Mathematics 6, 9-28 (2011)

(N) 西田吾郎　「ホモトピー論」　共立出版　(1985)

(OY1) N.Oda and T.Yamaguchi, Self-homotopy equivalences and cofibrations, Topology and its Applications 228, 341-354（2017）

(OY2) N.Oda and T.Yamaguchi, Self-maps of spaces in fibrations, Homology, Homotopy and Applications　20, 1-25 (2018)

(OY3) N.Oda and T.Yamaguchi, Self-closeness numbers of finite cell complexes, Topology and its Applications 272 (2020)

(O) E.P.オダム(水野寿彦訳) 「生態学」築地書館（1981）

(SS) M. Schlessinger and J. Stasheff, Deformation theory and rational homotopy type arXiv:1211.1647v1 (2012)　(the 1st version 1991)

(SY) H.Shiga and T.Yamaguchi　The set of rational homotopy types with given cohomology algebra. Homology Homotopy Appl. 5, 423--436 (2003)

(Y1) T.Yamaguchi, Cup_0 and cat_0 can be arbitrary in elliptic spaces.　New Zealand J. Math. 35, 211--213 (2006)

(Y2) T.Yamaguchi, Relative self-closeness numbers, preprint (2020)

(YY1) T.Yamaguchi and S.Yokura, Poset-stratified space structures of homotopy sets,　Homology, Homotopy and Applications 21, 1-22（2019）

(YY2) T.Yamaguchi and S.Yokura,　A proset structure induced from homotopy classes of maps and a classification of fibrations, Commun. Korean Math. Soc. 34, 991-1004（2019）