論　文

算数・数学における系統的な折り紙教材の開発研究（Ⅱ）

―根号を用いて表される長さの量感に着目して―

A Development Study on Systematic Origami-based Teaching Materials in Mathematics (Ⅱ): Focusing on the Measurement Sense of Length Represented by the Radical Sign

松原　和樹（中央学院大学商学部）[1]
服部　裕一郎（高知大学教育学部）[2]
神垣　雅郁（広島県立広島国泰寺高等学校）[3]

MATSUBARA Kazuki[1], HATTORI Yuichiro[2] and KAMIGAKI Masafumi[3]

1 *Faculty of Commerce, Chuo Gakuin University*
2 *Faculty of Education, Kochi University*
3 Hiroshima Kokutaiji High School

ABSTRACT

Origami is familiar with students in Japan. Moreover, we can take advantage of operational activities with using origami-based teaching materials to promote understanding of various mathematical concept. However, classes with the origami-based teaching materials are usually something like special events (not continuous or not systematic) and focus on localized situations of understanding specific mathematical concept. On the other hand, this study has a global viewpoint from elementary school to university (or wider range) and aim at systematic use of origami in various situations of math classes. In this paper, we focus on the measurement sense of length represented by the radical sign. We consider that the measurement sense is something meaningful to students who feel like they are bad at mathematics. On the other hand, we have some concerns about lack of the measurement sense of the students, even if they mastered the four arithmetic operations of irrational numbers as formal rules. The purpose of this research is to develop origami-based teaching materials in elementary school and high school, and to verify their usefulness through class practices, focusing on the measurement sense of irrational numbers in forming the concept of irrational numbers.

Ⅰ. 問題の所在と本研究の目的

算数・数学の授業で折り紙を教材として活用することは，主に「図形」領域で扱われることが多い。折り紙は，児童・生徒にとって日常生活の身近に存在し，かつ授業で扱うにあたっては，操作的活動を通して，数学概念の理解促進に繋げやすいというメリットを持つ。しかしながら，折り紙を教材として活用する授業は時に特設的であって，局所的な概念理解に焦点があたることが多く，校種を越えて学習内容の繋がりを意識した実践は見当たらない。さらには，折り紙を児童生徒達が用いる学習具として捉えると，他の学習具において，校種を問わず共通に用いられるものは極めて少ない。一方，科学・芸術・教育・数学・工学など，様々な分野に応用される昨今の折り紙科学の進展は目覚ましいものがあり（例えば，ドメイン，2009），他の学習具に比べて折り紙は極めて高い汎用性を持つ。本研究は，このような状況を鑑みて，折り紙教材を用いた算数・数学授業について，校種を越えた様々な学校現場への“系統的な”導入を目指すものである（松原・服部，2020）。

このたび射程を置く数学概念は「無理数」概念である。「思考の節約が最も発達している学問は，形式が最高度の進歩をとげた数学である。」とは，オーストリアの物理学者 E・マッハ（1838‐1916）の名言であるが，例えば，ルート記号の導入や円周率を π で表すことによる種々の計算も，形式的処理の意味では，氏の言う思考の節約と見なすことができよう。しかしながら，数学のよさである「思考の節約」も，その指導が計算技能による数式処理に傾倒し過ぎた場合，その意義は脆くも崩れ去ることにもなり得る。表 1 は，ある私立大学文系学部の 1 年生 46 名に対して実施した，無理数の基本的な理解に関する調査問題の結果である。問題はすべて 4 択（うち 1 つは“わからない”）での選択回答方式として，括弧内は解答者の割合を示している。この調査問題は，無理数の四則演算に対する基本的技能，無理数のおおよその大きさに対する感覚（以下，量感），無理数の導入で扱われる正方形の面積と辺の長さの関係に現れる無理数の理解の 3 点について，定着の度合いの差異を明らかにするために作成された。この調査結果から，学生達の無理数の量感が極端に欠落していることが伺える。そこで，この結果を受け，同じ学生に対して無理数の近似値に関する追加調査を実施した結果，$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$，$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.23$ を知っていると回答した学生はそれぞれ 32%，24%，12%であった。つまり，正方形の 1 辺の長さが面積の平方根であることや無理数を含む四則演算に関する形式的なルールは記憶に残っていたとしても，無理数に関する量感が喪失している学習者が多いことが懸念される。

無理数の概念は，中学校 3 年生の「平方根」の単元によって初めて導入され，以後，数学のあらゆる単元において扱われることになる。このアンケート調査結果においてもう一点，

表 1　無理数の基本的な理解に関する調査問題結果

	A	B	C	D
$\sqrt{2}+\sqrt{2}$	4 (7%)	2 (38%)	$2\sqrt{2}$ (51%)	わからない (4%)
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$	4 (22%)	2 (54%)	1 (17%)	わからない (7%)
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$ (31%)	$\sqrt{5}$より大きい (20%)	$\sqrt{5}$より小さい (38%)	わからない (11%)
面積 4 の正方形 1 辺の長さ	16 (11%)	4 (18%)	2 (62%)	わからない (9%)
面積 2 の正方形 1 辺の長さ	1 (11%)	4 (7%)	$\sqrt{2}$ (70%)	わからない (13%)

興味深いのは，“わからない”と回答する学生の少なさである。つまり，無理数の概念については定義や量感が備わっていないとしても，計算方法などの形式的な処理を（間違った処理だとしても）実行しようとする姿勢は身に付いていることである。第 3 章で詳述するが，これまでの無理数の概念理解に向けた先行研究では，無理数の持つ無限概念や非通約性の理解に焦点を充てたものが多く，それらは主に中学校における無理数学習の導入部分の議論である。それに対し，本研究ではその独自性として，中学校で無理数を学習する前の小学校段階から，ある程度学習した後である高等学校や大学の段階まで注目し，数学に苦手意識を持つ学生生徒にとっての無理数の量感に着目してみたい。

本研究は無理数を学習する前段階においても無理数の量感の涵養が可能であること，および形式的な処理技能に傾倒しすぎた学習者に対して，無理数学習における折り紙を用いた量感を伴う教材が有用であることを実証するものであり，無理数の概念形成にあたって，特に根号を用いて表される長さの「量感」に着目した上で，小学校段階及び高等学校段階における折り紙教材を開発し，授業実践を通してその有用性を検証することを目的とする。

Ⅱ. 研究の意義と方法

本研究で折り紙教材を用いる意義として以下の 3 点を挙げよう。

第一に，図形問題における角の二等分線などの作図については，フリーハンドではそれに困難性が認められ，一方で折り紙教材を用いた場合，その解消可能性が示される点である。実際，文系私立大学における学生約 200 名を対象に実施した視覚を頼りに角の二等分線を定規で引かせる調査において，AB=13cm，BC=12cm，CA=5cm である△ABC の∠A からの二等分線を引かせた。その結果，二等分線と辺 BC との交点の位置について，ずれの平均が約 11mm であった。この調査では学生達の作図力の困難性が顕在化したと言える。一方で，量感を伴わせるためにはある程度正確な作図が求められ

る。例えば，角の二等分線の性質を学ぶ際に，作図が不正確であれば，計算上の長さと図における感覚的な長さが一致しないこととなる。これに対して，紙を折ることによる角の二等分線の作図では，ある程度の正確性を持った作図が多くの学習者に対して期待できる。

第二に，折り紙教材が系統性を持たせやすい点である。例えば，本研究における無理数の量感を多角形の辺の長さとして捉える教材は小学校段階においては長方形の面積，中学校においてはルートの概念の導入，高等学校においては二重根号や相加相乗平均の大小関係など，折り紙を同様に用いることで様々な発達段階の学習内容に繋げることが可能となる。このような系統性を持たせやすいことは折り紙の汎用性によるものである。

第三に，学習環境を選ばない点にある。昨今強調されるICT機器等の活用，そしてその充実は今後も引き続き求められるものである。しかしながら，授業で使用するにあたっては，突然のネットワークトラブルや操作方法の困難性など，課題点も少なくない。一方で，折り紙文化が根付く日本において，折り紙教材は非常に扱いやすいという利点がある。さらには，馴染みのある折り紙が授業における学習具として身近に存在することは，児童生徒達の情意的側面に対しても良い影響を与えると期待する。

上記の理由から，本研究では折り紙教材を用いた２つの授業実践を開発し，中心的に考察を進める。１つは無理数の量感というものが小学校段階から涵養できることを示す。小学校において直角三角形で構成されるシルエットパズルを用いて，無理数の量感の育成を試みる。もう１つは形式的な技能がある程度定着している一方で，無理数の大小関係（例えば，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$と$\sqrt{5}$の大小関係）の問題に対して正しい解答を導き出せない高校生を対象とする。学習者が自ら紙を折ったり切ったりすることによって得られる直角三角形の辺の長さとして現れる無理数を用いて，高等学校における量感を伴う無理数学習の効果を検証する。

前章で示した研究の目的を達成するために，本稿は以下のような研究の方法をとる。まず，第Ⅲ章において数学教育研究における無理数の概念形成に関わる先行研究を概観し，本研究の位置づけを明確にする。第Ⅳ章では，現在の日本の数学教育において生徒達が無理数と初めて出会う単元である中学校第３学年「平方根」単元について，各教科書会社がとりわけその導入をどのように展開しているかを明らかにし，授業開発上の示唆を得る。第Ⅴ章，第Ⅵ章において開発した授業の実際を示し，その有効性を児童生徒達の様相から質的に分析する。第Ⅶ章において，結論と今後の課題を述べる。

Ⅲ．数学教育研究における無理数の概念形成に関わる先行研究

本章では数学教育研究における無理数の概念形成に関わる先行研究を概観してみよう。小原（2003）は非循環無限小数として表される無理数の性質に着目し，高等学校生徒の無理数理解を目指し，無理数の四則計算を逐次近似法で根拠づける指導法と幾何学的に根拠づける指導法を提案し，その効果を検証している。荻原・両角（2013）は有理数から $\sqrt{2}$ に限りなく接近することの意味を問うことが無理数を理解することを促進することを指摘し，また，両角・荻原（2016）では無理数や自然数に限りなく接近する有理数列とその極限に対する，生徒の数学的探究の様相を考察している。真野（2007）は無理数の学習指導における概念変容の考察を行い，また最近では，川内・渡邊（2018）が無理数の概念形成に向けた素地指導として，「無理数の動的イメージ」を提案し，中学校第２学年を対象とした授業実践を行っている。先行研究を概観すると，無理数理解を目指すにあたり，無理数の非通約性に着目したものが多く（他にも例えば，岩崎浩，2003），それらは高等学校や大学で学ぶ数学において，極めて重要な実数の連続性の理解に繋がるものである。

しかしながら，現在の学校教育において，微分積分を習わずに数学の学習を終える生徒も少なくなく，有理数の範囲において小学校以来大切にしている「量感」を無理数（特に平方根）に対しても重要視すべきではないかと考える。つまり，小学校では円周率を 3.14 として学ぶように，近似値として面積２の正方形の１辺の長さや $\sqrt{2}$ がおよそ 1.41 であるという場面を小学校から導入し，高等学校や大学においても形式的な計算と近似値としての計算を結びつけて問題に取り組む場面をより多く設定してもよいのではないだろうか。また，中学校の教科書には $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ の近似値が紹介されているが，一般的に平方根を逐次近似で小数第１位程度までは計算できるように，高等学校や大学でもそのような学習場面を設定することは有用であると考える。これらは，昨今の学校教育で役割を大きくしている統計教育において，近似値が多く使われることからも必要性が伺える。

数学的な観点で見ると，実数の連続性は非常に重要な概念であることは明らかであり，それらの素地を育成する先行研究の意義は疑う余地のないものであるが，一方では，量感が伴う近似値についても重要である。例えば，検算は小学生から数学者まで共通して用いる手法であり，近似計算も有効な検算方法の１つである。具体的には，求積問題を解く際に見た目の量感で概算して検算する場合などを想起されたい。近似値が関わる場面は数学研究のあらゆる分野で見られるため，数学的な観点からも量感の育成には意味がある。しかしながら，先行研究においてこれらの視点に着目したものは管見の限り見当たらない。

Ⅳ．教科書における無理数概念の導入の取り扱い

本章では，現在の日本の数学教科書において，無理数概念の導入が如何に扱われているかについて，全教科書会社の動

表２　各教科書会社の無理数概念の導入の取り扱い

教科書会社	章扉における中心的内容
T社	１目盛りが 1cm である方眼用紙に面積が 50cm^2 の正方形をかかせ，１辺の長さがどれくらいになるかを問う。
KE社	１目盛りが1cmである方眼用紙に色々な正方形をかかせ，面積を求めた後に、１辺の長さについて，どんなことがいえるのかを問う。
N社	１目盛りが1cmである方眼用紙に色々な正方形をかかせる。その後，面積が2cm^{2}の正方形の１辺の長さについて調べる。
D社	等しい辺の長さが 1cm の直角二等辺三角形をしきつめたものから面積が 1cm^2，2cm^2，4cm^{2}になる形を見つけさせ，その後，面積が 2cm^2 の正方形の１辺の長さについて測って求める。
G社	縦横1cm間隔で点が打たれた図において，面積が 1cm^2，2cm^2，4cm^2，5cm^2，8cm^2，9cm^2，10cm^{2}になる正方形をそれぞれかかせ，すべての正方形の１辺の長さを測らせる。
KY社	縦横1cm間隔で点が打たれた図において，面積が異なる正方形をつくり，面積を求めた後に，正方形の１辺の長さを測らせる。
S社	１目盛りが 1cm である方眼用紙に面積が 1cm^2, 2cm^2, 9cm^{2}の正方形がかかれており，面積が 2cm^2 の正方形の１辺の長さを測らせる。

向を確認してみよう。結果は表２のとおりである。方法としては，各教科書会社の「平方根」単元における章扉の中心的内容・問いを調査した[1)]。表２から分かるように，無理数の導入についてはすべての教科書会社が正方形の面積から１辺の長さを求めることを課題として設定している[2)]。4cm²の正方形や9cm²の正方形であれば，既知の整数値として１辺の長さを求めることができるが，面積が 2cm² である正方形の１辺の長さについては，実測や電卓による計算によって整数では表せないことが子ども達に認識される。その後，２乗してａになる数を“ａの平方根”として来，定義されることになる訳である。小学校で長さを学んで以来，実測という作業は非常に有効なものとして利用してきている。しかしながら，数学においては無理数などを扱うため，ある意味で形式的な計算を用いて解答することが多くなるとともに，実測では必ず誤差を含むことに気付かされる。実際に，工業的な観点からしても，たとえ１㎝を実測することすら正確にはできないのであって，精度をどの程度に設定するかという問題を常に考えなければならない。当然，定規とコンパスによる作図においてもそれらはあくまでも近似値，または近似的な図形でしかないのである。ちょうど中学校における無理数の導入は，実測による誤差の認識と，形式的な計算による導出との狭間にあたるため，実測するとおおよそ○○㎝，この数値で計算すると面積は○○cm²である（誤差の認識）という２つの作業を繰り返し行うことが重要だと思われる。そして，長さとしては数直線上に存在するはずなのに２乗してちょうど２となる数が見当たらないことや，いくらでも近い値は見つかることを意識することが，ルート記号の必要性や形式的な技能が定着した後の無理数の量感に繋がるものと考えられる。次章以降では，これまでの議論に基づき小学校及び高等学校段階において無理数の量感に着目した授業を開発し，その実践の具体を考察する。

Ⅴ．小学校における授業実践

１．授業のねらいと概要

本授業のねらいは，折り紙を用いて，操作的活動を楽しみながら無理数概念の素地を育成することである。まず導入では，面積 1cm² の正方形の１辺は 1cm であること，面積 4cm² の正方形の１辺は 2cm であること，面積 9cm² の正方形の１辺は 3cm であることを確認する。その後，授業者から「面積 8cm² の１辺の長さはどれくらいの大きさなのだろうか？」と問いかける。具体的な活動としては，図１のような 1cm² のマス９個分で構成された 3×3 の正方形から 1cm² のマス（図１の右から１番目，上から１番目の正方形）を取り除き，残り（8cm²）で新たに正方形を完成させるパズルゲームである。児童達は図１の太線部分をハサミで切り取り，すべてのピースを使って，再度正方形になるよう試行錯誤する。早くできた児童にはピースの形が異なる図２，図３のパズルが配布され，同様のパズルゲームを行う

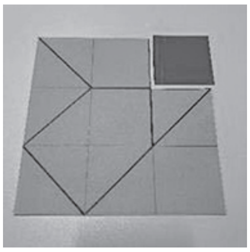

図１　面積 8㎠ の正方形パズル１

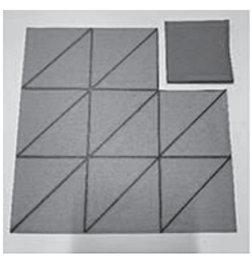

図２　面積 8㎠ の正方形パズル２

図3　面積 8cm^2 の正方形パズル3

その後，図1から図3のパズルを完成させたものを比較検討することで，それぞれの1辺の長さがすべて面積 2cm^2 の直角三角形の斜辺の長さ2つ分になっていることに気付かせたい（図4）。

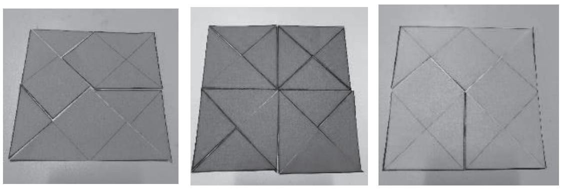

図4　完成した面積 8cm^2 の正方形パズル

2．授業の実際

授業は 2019 年2月にK県小学校において，高学年の複式学級による合同学習形態（5年：3名，6年：5名）の授業形式で行われた。授業時間は 13:45〜14:45 の 60 分間である。授業者は2名体制で行った。

授業の導入では授業者によって，面積 1cm^2 の正方形の1辺は 1cm であること，面積 4cm^2 の正方形の1辺は 2cm であること，面積 9cm^2 の正方形の1辺は 3cm であることが児童とともに確認された（図5）。

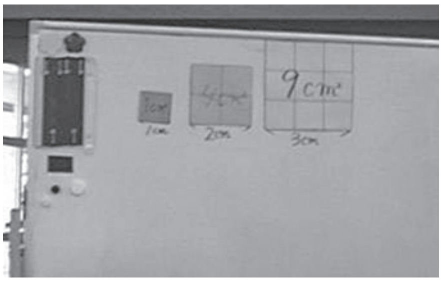

図5　正方形の1辺の長さが整数となる場合の確認

その後，授業者は「面積が 8cm^2 の正方形の1辺の長さって何 cm になるかな？」と問うた。児童達は，戸惑い，この時点での発言はなかった。そこで授業者はまず，面積が 8cm^2 の正方形をイメージさせるため，図6を提示した。この正方形は面積 9cm^2 の正方形であること，その後，赤色の面積 1cm^2 の正方形を取り除き，残りの部分（緑色）でうまく正方形が作ることができれば，それは面積が 8cm^2 の正方形であることを確認した。そして，その1辺の長さがどれくらいの長さなのかをまずは生徒に予想させた。

しかしながら，児童達からの予想は提出されず，授業者は以下のめあてを設定し，折り紙パズル活動に入った。

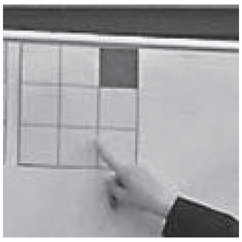

図6　面積 9cm^2 の正方形から面積 1cm^2 を取り除く

＜めあて＞

面積 8cm^2 の正方形の一辺の長さを折り紙パズルで考えよう

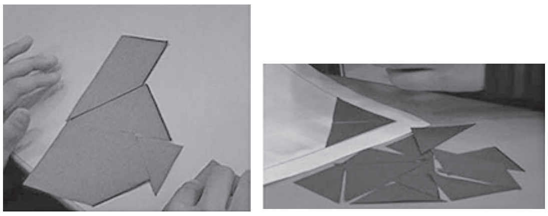

図7　児童達のパズル活動の様子

図7は児童達のパズル活動の様子である。図1，2，3で示した3種類のパズルを児童達はそれぞれ順番に完成させ，早くできた児童にはホワイトボード上のパズルも完成させてもらった（図8）。

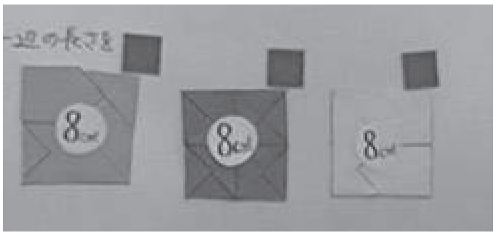

図8　完成した3種類のパズル

その後，授業者はこの図8から何か気づくことがないかを問い，児童達にワークシート記述を促した。以下は代表的な児童達の回答の実際である。

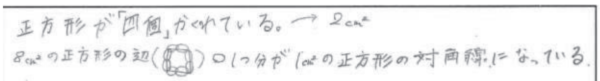

図9　児童Tの気づき

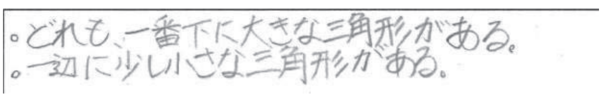

図10　児童Fの気づき

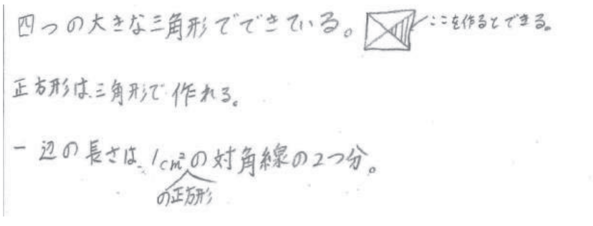

図11　児童Kの気づき

授業者は，これら児童の気づきから，3種類の正方形の1辺の長さがどれも直角二等辺三角形のピースの斜辺2つ分で

あることを確認した。また，図 9 の児童 T の気づきの通り，この 8㎠ の正方形には面積 2㎠ の正方形が 4 個かくれており，この 1 辺が直角二等辺三角形の斜辺の長さであることも確認した。

3．授業の考察

本授業実践における児童達の様相から，小学校段階における無理数概念の素地育成の可能性を検討してみよう。授業の導入場面では，面積 1㎠ の正方形の 1 辺は 1cm であること，面積 4㎠ の正方形の 1 辺は 2cm であること，面積 9㎠ の正方形の 1 辺は 3cm であることは比較的容易に児童達から回答が提出された。しかしながら，面積 8㎠ の 1 辺の長さを問われた際には，児童達に戸惑いの様子が明確に顕れ，図 6 に示したような方法で正方形を作成することに関してもそのイメージを持つことに困難性を抱いているようであった。そのため，授業者はパズル活動を優先的に行うことを採用し，児童達の数学的活動の遂行を見守ることとした。結果，パズル活動は多くの児童が楽しみながら面積 8㎠ の正方形づくりを意欲的に取り組んでいた。その後の完成したパズルの比較検討場面では，図 9，10，11 に見られるように，正方形の対角線部分（直角二等辺三角形の斜辺部分）に着目している様子が窺える。その長さの明確な数値は特定できないものの，面積 2㎠ の正方形の対角線部分への長さの意識は顕在化したと言える。確かに，小学校段階の児童達に，無理数の量感の明確な獲得は容易ではないであろう。しかしながら，このように児童達の操作的活動を優先的に行うこと，授業者から児童達へ「面積 8㎠ の正方形」のパズルであることを明確に意識させること，いくつかの完成した正方形について，その共通性を抽象化させること，これらの支援や数学的活動が無理数の量感獲得へつながるものになるのではないかと考える。

Ⅵ．高等学校における授業実践

1．授業のねらいと概要

本授業のねらいは，折り紙教材を用いることにより，他者との議論を通して，無理数概念における量感の獲得を目指すことにある。まず導入では主として扱う問題が $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の大小関係の比較であることを確認する。電卓のルートボタンで計算できるけれど，この授業ではルートボタンを使用しないというルールで，折り紙の 1 辺の長さを 2 として $\sqrt{5}$ の長さを持つ線分の作り方を全体で確認する。その後，$\sqrt{1}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の長さを持つ線分を各自で作り，折り紙の 1 辺の長さが 15cm であることと線分の実際の長さを用いて，比の計算によりそれぞれの無理数の近似値を求める。最後に，無理数の近似値を踏まえた上で，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の大小関係を折り紙上の線分の長さの直接比較により確認し，結論を導き出させたい。

2　授業の実際

本授業実践は 2018 年 12 月に H 県内の高等学校にて行った。対象は選択クラス全 11 名（第 3 学年）であり，商業科の生徒である。授業時間は 50 分であり，本章では折り紙を用いた活動における生徒達の様相を記述してみよう。

授業開始時に，授業者によって本時で扱う $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の大小関係の問題が提示された。そして，全員が $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ は成り立たないという共通理解のもと，どちらが大きいかの予想ではおおよそ半数ずつの生徒で意見が分かれた。その後，折り紙を配布し，1 枚の折り紙を半分に折り，できた長方形の対角線が $\sqrt{5}$ の長さの線分であることを全体で確認した。その際の授業者と生徒達で

T：これで $\sqrt{5}$ ができるよね？

S0：えっ？なんで？

というやり取りの中で三平方の定理が想起された。さらに，求めた線分を測り 16.8cm であったことから，折り紙の 15cm の辺を長さ 2 としていることを利用して，比の計算により，線分の長さを 7.5cm で割ると無理数の近似値が求まることを確認した（図 12）。

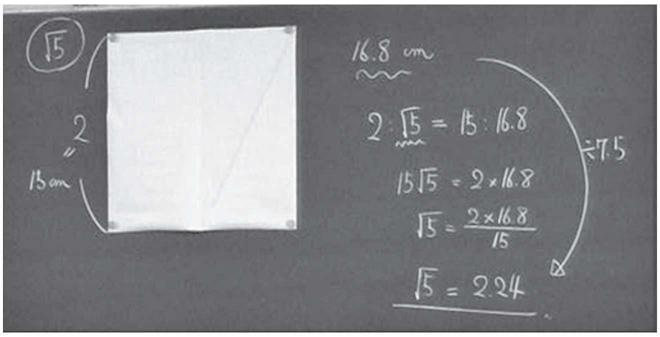

図 12　$\sqrt{5}$ の近似値

計算には電卓を用いて，小数第 2 位まで計算することとした。ここから，$\sqrt{1}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の長さを持つ線分を各自で作る活動に入り，教師は生徒達を適宜支援した。$\sqrt{1}$，$\sqrt{4}$ を作る活動においては

S1：$\sqrt{1}=1$ だから 1 辺の半分でできるね。

S2：$\sqrt{4}=2$ だから折らなくていいね。

など，他者の折り紙を観察しながら各自の作業が進められた。

一方で，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ については困難性が増し，全員が他者との意見交換を通して考えを進めていった。

S3：ここが $1:1:\sqrt{2}$ じゃろ。

S4：なるほど！やるやん！

さらに，$\sqrt{3}$ に対しては $1:2:\sqrt{3}$ という比はわかっていても，扱っている直角三角形が $1:2:\sqrt{5}$ である生徒が散見された。そこで，教師から $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形の辺の位置関係が説明された後，数名の生徒がすべての線分の長さを作ることに成功した。また，早く課題が終了した数名の生徒に対しては，$\sqrt{6}$ や $\sqrt{7}$ を作ってみるよう教師から発展問題が提示された。

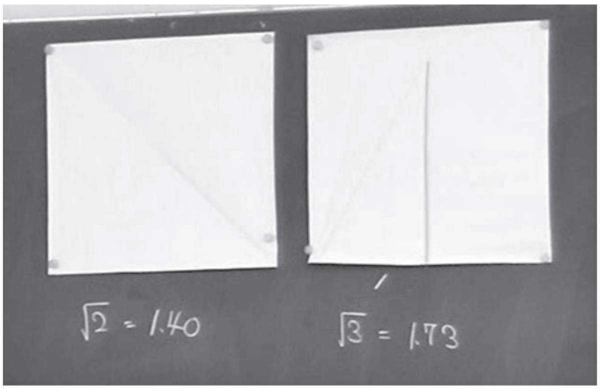

図 13　$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の近似値

最後に，全員が測定した結果をもとに，それぞれの無理数の近似値を計算する一方で，直接比較により $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の大小関係を全体で確認した（図 13）。そして，終了間際に $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{8}$ の大小関係を教師が問うたところ，全員が間違った考え（$\sqrt{8}$ の方が大きい）を示した。この問題は次時に確認するということで授業は終了した。

授業後に対象生徒 10 名（1 名は欠席）に対して実施した事後アンケートにおける折り紙教材に対する感想は下記のとおりである。

・折りにくかった。$\sqrt{\ }$ の大きさが分かりやすかった。
・実際に折ってみるとイメージしやすい。
・折り紙が折りにくい。物を使って授業するのが分かりやすい。
・$\sqrt{\ }$ のことを理解しやすかった。黒板で書くだけよりも，自分たちで作るから分かりやすかった。
・想像することができた。
・文で書かれるよりも見た方が分かりやすかった。
・実際にやって分かりやすかった。楽しかった。
・発想が広がっていく感じが楽しかった。
・折り紙などで具現化することは分かりやすい。黒板よりも楽しくできる。
・普段折り紙を使うことがないので新鮮だった。

3．授業の考察

今回扱った問題は通常，両辺を二乗して形式的に大小関係を比較する，または近似値を利用して比較する問題であるが，対象生徒については大小関係に対する予想は半数ずつに分かれ，予想の根拠を説明できる生徒はいなかった。これらのことから，多くの生徒が無理数に対して困難性を有していることが窺える。さて本時は，折り紙を折ったり切ったりしてできる直角三角形の辺の長さを直接比較することや実際に測定することによる量感を伴う学習の効果を検証することがねらいであった。

まず，本教材が量感を伴う教材として有効に機能していたかを検証してみよう。量感にとって重要となるある程度正確な作図について，各自の測定値のずれの少なさや，アンケートの感想からも本教材が十分に正確性を伴うものであり，近似値も十分近い値が求まっていた。このことから量感を伴う教材として機能していたと言える。一方で，折りにくかったという感想からもわかるように，長方形の対角線に折り目を入れる作業にはやや困難を示す生徒が多かったのも事実である。さらに複雑な問題となると折る技術についての問題は無視できないことが示唆された。

次に，系統性の効果を見てみよう。$\sqrt{5}$ の長さの線分を全体で確認する際に，なぜ $\sqrt{5}$ の長さになるのかという疑問が生じ，三平方の定理が自然と想起された。また，$\sqrt{1}=1$ や $\sqrt{4}=2$ といった関係式や三角定規の辺の長さの比などについても，生徒が自発的に意見交換を行い，誤った理解の修正が生徒間で活発に行われた。さらに遡り，2 を半分にしたら 1 であるという基本事項を確認したり，4 等分，8 等分したりする生徒も見られ，分数・小数・無理数といった概念や，それに関わる定理等が次々に想起されたのは折り紙教材の汎用性であり，教材の持つ系統性に起因する。また，問題を早く解決できた生徒に対する課題で $\sqrt{6}$ や $\sqrt{7}$ の長さの線分を考えさせる場面でも，教材の系統性が発揮されたと言える。

これらをもとに，今回扱った折り紙教材の効果を考えると，$\sqrt{2}+\sqrt{2}$ や $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ などの形式的な処理はできるけれど，少し異なる問題に対して対処できない生徒にとって，1 つの記号でしかなかった無理数の根号表記に量感を伴わせることは，無理数の理解に対する一定の効果があったと言える。しかしながら，最後の問いである $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{8}$ の大小比較について，全員が間違ったことについては興味深い。本時では $\sqrt{8}$ を測定していないため，本時で扱った近似値だけでは難しい問題であった。$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ であることと，今回測定した近似値が組み合わされればすぐに答えにたどり着いたが，全員がたどり着けなかったことは，量感に傾倒しすぎることのデメリットと言えよう。今回のねらいはあくまでも量感を伴う折り紙教材の効果の検証であったため，この困難性を克服する折り紙教材の開発は今後の検討課題としたい。

Ⅵ．まとめと今後の課題

本稿の目的は，無理数の概念形成にあたって，特に根号を用いて表される長さの「量感」に着目した上で，小学校段階及び高等学校段階における折り紙教材を開発し，授業実践を通してその有用性を検証することであった。結果，折り紙教材が，無理数の量感について小学校段階でも十分の素地を涵養できること，及び高等学校において無理数の扱いに困難性を有する生徒に対しても，量感を伴う教材として有用であることが示された。これらは，主に授業の様子とアンケート結果から得られた知見であるが，継続的な実践と対象児童生徒のその後の無理数理解の変容を捉えていくことが本研究においては重要であり，今後の課題である。

また，鮮明な色のついた折り紙を用いた数学的活動は視覚

的に相互の活動が確認しやすい。これらは本実践においても生徒間での活発な意見交換を促したことから，コミュニケーションツールとしての折り紙の有用性も示唆された。さらには，今回の小学校と高等学校での実践それぞれにおいて，折り紙の汎用性により，学び直しが自然に促された点や，容易に発展問題を提供できた点は，学力差のある集団に対する折り紙教材の有用性だと考える。

一方で，折り方が難しかったという感想からも，教材としての工夫がさらに必要となる。また，量感の涵養に傾倒しすぎることもまた問題であることが示唆されたことから，数を扱う様々な場面において，計算技能による数式処理とのバランスを考慮して，量感を育成していくことが肝要であると考えられる。いずれにしても，１つの問いに対して様々な思考過程を辿れる数学の面白さを考えるとき，量感というツールは１つの思考過程を提供する。そして，様々な数の量感を容易に味わうことができる折り紙教材の開発は，算数・数学離れなどの諸問題に対する活路を見出すことに繋がると信じている。今回の実践を今後の研究の土台としたい。

謝辞

本研究は，公益財団法人博報児童教育振興会による第 13 回児童教育実践についての研究助成「算数・数学における系統的な折り紙教材の開発研究」の助成を受けて実施された研究成果の一部である。また，このたびの授業実践研究においては 2018 年度高知大学教育学部３回生服部ゼミ所属の高島尚之さん，谷口拓馬さん，中家和音さん，篠原渚さん，関川ひかりさん，山本思織さん，山本和佳奈さんに多大な協力を頂きました。また，授業実践校として協力を頂きました高知県南国市立白木谷小学校の先生方，児童の皆さんに心より感謝申し上げます。最後に，本研究に関わる多くのご助言を頂きました広島県立広島高等学校の長谷川結城先生，広島県立呉商業高等学校の川西真澄先生，生徒の皆さんに感謝申し上げます。

註

1)　章扉に問いが設定されていない場合は，章において初めて問われる内容を示した。また，前章までの復習問題は除く。

2)　章扉の段階で，実際に１辺の長さを測らせる活動を取り入れているのは，全７社中５社であった。この５社のうち１社は教科書のキャラクターが測っている。また，章扉の段階で「測る」活動を行っていない２社とも，後の平方根のおよその値を求める小単元「平方根の値」において，「測る」活動は行われている。

引用・参考文献

岩崎浩（2003）.「$\sqrt{2}$の無理数性の認識について」.『上越数学教育研究』，第 18 巻，pp.23-30.

岡部恒治　他（2016）.『中学校数学 3』，数研出版.

岡本和夫　他（2016）.『未来へひろがる数学 3』，啓林館.

エリック・D・ドメイン，ジョセフ・オルーク　上原隆平訳（2009）.『幾何学的な折りアルゴリズム　リンケージ，折り紙，多面体』，近代科学社.

荻原文弘・両角達男（2013）.「スパイラルを重視した数学的活動による無理数に関する理解の深化－単元『数列』における有理数列の探究過程に着目して－」. 日本数学教育学会誌『数学教育』，第 95 巻，第 9 号，pp.2-9.

小原豊（2003）.「無理数の理解に及ぼす２つの異なる指導方法の効果」,『科学教育研究』, 第 27 巻, 第 5 号, pp.372-380.

川内充延・渡邊公夫（2018）.「平方根の導入のための素地指導に関する一考察 ―無理数の動的なイメージの構築を目指して―」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 24 巻，第 1 号，pp.61-69.

澤田利夫　他（2016）.『中学数学 3』，教育出版.

重松敬一　他（2016）.『中学数学 3』，日本文教出版.

真野祐輔（2007）.「無理数の学習指導における概念変容の基礎的考察一「内容」と「形式」の相互連関としての数学史を手がかりにして一」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 13 巻，pp. 147-154.

相馬一彦　他（2016）.『数学の世界 3』，大日本図書.

一松信　他（2016）.『中学校　数学 3』，学校図書.

藤井斉亮　他（2016）.『新編　新しい数学』，東京書籍.

松原和樹・服部裕一郎（2020）「算数・数学における系統的な折り紙教材の開発研究（I）―複式学級における合同学習形態による小学校算数科授業における実践―」，高知大学教育学部研究報告第 80 号，pp.95-101.

両角達男・荻原文弘（2016）.「$\sqrt{2}$や自然数に接近する有理数列とその極限に関する数学的探究」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，第 2 号，pp.197-211.

附記

本稿は，2019 年 12 月 14 日・15 日に開催された全国数学教育学会第 51 回研究発表会（於：広島大学大学院教育学研究科・教育学部）において発表した資料を加筆修正したものである。